1 証明

$$seqn\ a\ f = a : seqn\ (f\ a)\ f \tag{1}$$

が、

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_{n+1} &= f(a_n) \end{aligned} \tag{2}$$

で表される無限数列であることの証明。

1.1 無限数列であることの証明

$seqn$ は Cons (:) を使って定義されているので、空リストでないリスト（数列）である。
(Cons (:) は要素をリストの先頭に加える関数である。例えば、$1 :[] = [1]$, 3:[2,1] = [3,2,1])
また、 $seqn$ が有限の長さを持つとすると、

$$\begin{aligned} length(seqn\ a\ f) &= length(a : seqn\ (f\ a)\ f) \\ &= 1 + length(seqn\ a\ f) \end{aligned} \tag{3}$$

となり矛盾。(length はリストの長さを求める関数）従って、$seqn\ a\ f$ は無限数列である。

1.2 式 1 が 式 2 と等価であることの証明

式 1 の右辺は

$$seqn\ a\ f = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n, \ldots] \tag{4}$$

と表される。一方、右辺は

$$\begin{aligned} a : seqn\ (f\ a)\ f &= a : [b_0, b_1, \ldots] \\ &= [a, b_0, b_1, \ldots] \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで、

$$seqn\ (f\ a)\ f = [b_0, b_1, \ldots] \tag{6}$$

である。左辺と右辺を比べて、

$$a = a_0 \tag{7}$$

となる。つまり $seqn$ の最初の引数は初項を表すことがわかった。従って、

$$b_0 = f(a_0) \tag{8}$$

つまり、

$$a_1 = f(a_0) \tag{9}$$

である。

次に、

$$a_n = f(a_{n-1}) \tag{10}$$

が成り立つとき

$$a_{n+1} = f(a_n) \tag{11}$$

が成り立つことを示す。

式 10 と、数列 $\{b_n\}$ の定義から、

$$b_n = f(b_{n-1}) \tag{12}$$

である。式 4 と 式 5 を比べて、

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} && (13) \\ a_{n+1} &= b_n && (14) \\ &= f(b_{n-1}) \\ &= f(a_n) && (15) \end{aligned}$$

以上をまとめると、式 1 の定義は次のことを意味する。

1. $a_1 = f(a_0)$ である。
2. $a_n = f(a_{n-1})$ が成り立つとき $a_{n+1} = f(a_n)$ である。

このことから、数学的帰納法により 式 1 の定義は式 2 と等価であることが示された。